**BÀI 6: MỘT SỐ DẠNG TOÁN PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN ĐẶC BIỆT**

**A. Kiến thức cần nhớ**

- Nguyên tắc: Biến đổi phương trình bậc 4 về phương trình bậc hai đơn giản hơn

- Một số dạng phương trình bậc 4 đặc biệt khác:

a) Dạng:  (1)

*Cách giải:* Đặt 

b) Dạng: 

*Cách giải:* - Đối với phương trình (2), đặt  thay vào phương trình đã cho, biến đổi về phương trình bậc hai

- Đối với phương tình (3), đặt  thay vào phương trình đã cho, biến đổi về phương trình bậc hai

c) Dạng:  với 

*Cách giải:* 

Đặt 



Hoặc đặt , sau đó biến đổi phương trình về phương trình bậc hai ẩn t và tìm t, sau đó tìm 

d) Dạng:  (5)

*Cách giải:* Đặt  tìm  tìm 

**Bài 1:**

Giải các phương trình sau:

a)  (1) b)  (2)

**Lời giải**

a)

*Cách 1:* Dùng công thức  để khai triển  và 

*Cách 2:* Đặt 

Phương trình (1) trở thành: 





Vậy phương trình có tập nghiệm 

b) Đặt  ta có phương trình 



**Bài 2:**

Giải các phương trình sau:

a)  b) 

**Lời giải**

a) 



Đặt  ta có phương trình 

b) 



Đặt , ta có phương trình 



**Bài 3:** Chuyên Khánh Hòa, năm học 2011

Giải phương trình 

**Lời giải**

Ta có:





Đặt  phương trình (1) trở thành 

Từ đó ta tính được 

**Bài 4:** Sư Phạm Ngoại Ngữ, năm học 2004

Giải phương trình 

**Lời giải**

Ta có 



Đặt  phương trình (1) trở thành: 

**Bài 5:**

Giải phương trình sau:

a)  b) 

**Lời giải**

a) Ta có 

Đặt  ta có phương trình: 

b) 



**Bài 6:**

Giải phương trình sau:  (1)

**Lời giải**

Phương trình 

Đặt 

 trở thành 

- Nếu 

- Nếu 

Vậy phương trình có tập nghiệm 

**Bài 7:**

Giải các phương trình sau:  (1)

**Lời giải**

Phương trình 



Đặt  ta được phương trình: 



Vậy phương trình có tập nghiệm 

**Bài 8:**

Cho phương trình  (1). Biết rằng phương trình (1) có 4 nghiệm. Tính giá trị của biểu thức  theo 

**Lời giải**

Ta có 

Đặt  ta được phương trình 

Để phương trình (1) có 4 nghiệm thì phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt  thỏa mãn hệ thức Viét 

Giả sử  là hai nghiệm của phương trình: 

 là hai nghiệm của phương trình: 

Khi đó  (hệ thức Viét)

Ta có .

**BÀI 7: MỘT SỐ DẠNG TOÁN PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN ĐẶC BIỆT (tiếp)**

**A. Kiến thức cần nhớ**

1) Dạng: 

Cách giải: 



Đặt 

2) Dạng: 

Cách giải:

- Xét  chuyển thành phương trình dạng (2)

Dạng: 

Cách giải:

- Nếu  (vô lý)

- nếu  chia cả 2 vế của phương trình (2) cho  ta được:



Đặt  ta được: 

3) Dạng: 

- Nếu  (vô lý)

- Nếu 

Đặt  ta được: 

 biến đổi phương trình về phương trình bậc hai ẩn t

**Bài 1:**

Giải phương trình sau: 

**Lời giải**

*Cách 1:* Nhẩm nghiệm (tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ nên có 1 nhân tử là )

*Cách 2:* 



Đặt 

**Bài 2:** Chuyên Lam Sơn, năm học 2012

Giải phương trình sau: 

**Lời giải**

Ta có: 

Dễ thấy  không là nghiệm của phương trình (\*)

Khi , chia cả hai vế của phương trình (\*) cho  ta được: 



Đặt 

**Bài 3:**

Giải phương trình: 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Nhận thấy  không là nghiệm của phương trình (1)

Khi 

Đặt  (do  và  cùng dấu)



, điều kiện: 



- Với , ta có: 

Vậy .

**Bài 4:**

Giải phương trình: 

**Lời giải**

Ta có , dấu “=” xảy ra 

, dấu “=” xảy ra 

Từ 

Vậy để , dấu “=” xảy ra tại (1) và (2) 

Vậy .

**BÀI TẬP TƯƠNG TỰ**

**Bài 1:**

Giải phương trình sau: 

**Lời giải**

Phương trình đã cho tương đương: 



Đặt 

- Nếu 

- Nếu 

**Bài 2:** Sư Phạm Ngoại Ngữ, năm học 2005

Giải phương trình sau:  (1)

**Lời giải**

Đặt 

Phương trình đã cho trở thành: 

- Nếu 

- Nếu  (vô nghiệm)

Vậy phương trình có tập nghiệm 

**Bài 3:**

Giải phương trình sau:  (1)

**Lời giải**

Rõ ràng: 

Chia cả tử và mẫu của mỗi phân thức cho  ta được: 

Đặt , ta có phương trình:



- Với 

- Với  (vô nghiệm)

**Bài 4: Trần Đại Nghĩa TPHCM, năm học 2003**

Giải phương trình sau: 

**Lời giải**

Nhận thấy  không là nghiệm của phương trình

Với , chia cả hai vế của phương trình cho  ta được: 

Đặt 

**Bài 8: PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI**

I. Kiến thức cần nhớ

1. Giá trị tuyệt đối

Với  thì 

2. Các tính chất

+ 

+ 

+ 

+ 

+ 

+ 

+ 

+ 

3. Các dạng toán

Dạng 1: 

Dạng 2: 

Dạng 3: 

Dạng 4: 

Dạng toán này ta đi lập bảng xét dấu GTTĐ

Dạng 5: 

Do  tìm được  phá được dấu giá trị tuyệt đối

Nếu giả thiết không tìm được  thì ta đi lập bảng xét dấu giá trị tuyệt đối.

Dạng 6:  (dạng đặc biệt của dạng 4).

Dạng 7: 

Dạng 8: 

II. Bài tập

**Bài 1:**

Giải các phương trình sau

a)  b) 

c) 

**Lời giải**

a) Ta có 

b) 

Vậy phương trình vô nghiệm.

c) Ta có 

**Bài 2:**

Giải các phương trình sau

a)  b) 

c) 

**Lời giải**

a) Ta có 



b) Điều kiện 

Phương trình  (thỏa mãn)

c) Ta có 

**Bài 3:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Ta lập bảng xét dấu

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | + |  | - |  | - |  | + |  |
|  |  | - |  | - |  | + |  | + |  |

+ TH1: Nếu , phương trình  (loại)

+ TH2: Nếu , phương trình 

+ TH3: Nếu , phương trình 

+ TH2: Nếu , phương trình 

Vậy 

**Bài 4:**

Xác định  để phương trình sau có nghiệm: 

**Lời giải**

Phương trình 

Đặt 

Phương trình 

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm 

+ TH1: Phương trình (2) có nghiệm 

+ TH2: Phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu 

+ TH3: Tất cả các nghiệm của phương trình (2) đều dương

 (vô nghiệm )

Vậy 

**Bài 5:**

Giải các phương trình sau:

a) 

b) 

c) 

**Lời giải**

a) Ta có 

Vậy 

b) Điều kiện: 

Xét với  thì phương trình đã cho trở thành:

 (loại)

Xét với  thì phương trình đã cho trở thành:

 (loại)

Xét  thì phương trình đã cho trở thành:

 (loại)

Vậy phương trình vô nghiệm.

c) Nhận thấy 

Vậy phương trình đã cho viết thành 

Thử lại thấy thỏa mãn.

**Bài 6:**

Giải các phương trình sau:

a) 

b) 

**Lời giải**

a) Ta có 



Xét 2 trường hợp giải phương trình bậc hai, đối chiếu điều kiện và kết luận.

b) Ta có 





**Bài 7:**

Giải và biện luận cácc phương trình sau

a) 

b) 

**Lời giải**

a) Ta có: 



+) Giải phương trình (1)

Nếu  thì phương trình (1) có nghiệm với mọi 

Nếu  thì phương trình (1) có nghiệm 

+) Giải phương trình (2)

Ta có 

- Nếu  thì (2) có nghiệm 

- Nếu  thì (2) có nghiệm kép  tương ứng.

- Nếu  thì (2) vô nghiệm.

Khi phương trình (2) có nghiệm  thì . Khi đó, nghiệm còn lại là 

Kết luận:

- Với  thì phương trình đã cho có hai nghiệm  và 

- Với  phương trình đã cho có 3 nghiệm 

- Với  phương trình đã cho có hai nghiệm. 

- Với  phương trình đã cho có 1 nghiệm 

- Với  phương trình đã cho có 2 nghiệm 

- Với  phương trình đã cho có nghiệm với mọi .

b) Chú ý rằng  nên:



Làm tương tự câu a).

**Bài 8:**

Định  để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt 

**Lời giải**

Ta có:  nên: 



Để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) và (2) đều phải có 2 nghiệm phân biệt, đồng thời 2 phương trình này không có nghiệm chung.

Xét phương trình (1): 

Xét phương trình (2): 

Giả sử phương trình (1) và phương trình (2) có nghiệm chung  khi đó:



Vậy để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì 

**Bài 9: PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN**

I. Kiến thức cần nhớ

\*) Phương trình nghiệm nguyên là phương trình có nghiệm là các số nguyên

\*) Phương pháp giải

+ Đưa phương trình về dạng tổng hoặc tích

Ví dụ: 

+ Dùng các tính chất chia hết, số dư, chữ số tận cùng

+ Dùng bất đẳng thức

+ Sử dụng tính chất cơ bản của  trong 1 phương trình bậc hai

(chẳng hạn:  là 1 nghiệm,  thì  là số chính phương và )

+ Sử dụng các tính chất của số chính phương, số nguyên tố

+ Phương pháp đánh giá

+ Phương pháp hạ bậc.

II. Bài tập

**Bài 1:**

Tìm nghiệm nguyên của phương trình 

**Lời giải**

Từ giả thiết  là số lẻ  là số lẻ

Đặt 



 chẵn  là số chẵn

Đặt 



Ta có  của (\*) là số chẵn, VP của (\*) là số lẻ, nên (\*) vô nghiệm.

**Bài 2:**

Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên  thỏa mãn 

**Lời giải**

Ta có phương trình 

Nhận thấy 

Tương tự ta có  và 

 và 

**Bài 3:** Chuyên Ngoại Ngữ, ĐHQGHN, năm học 2010

Tìm tất cả các cặp số nguyên  thỏa mãn  (đưa về dạng tích)

**Lời giải**

Ta có 

Nhận thấy 

Vậy HPT có nghiệm 

**Bài 4:** Chuyên Đắc Lắc, năm 2010

Tìm nghiệm nguyên của phương trình  (Dùng )

**Lời giải**

Phương trình 

Đặt 

Để phương trình (\*) có nghiệm nguyên thì (\*\*) cũng phải có nghiệm nguyên ẩn 

Khi đó  và  là số chính phương

Ta có 

+  (loại)

+  (thỏa mãn)

Thay vào (\*) ta được 

Vậy HPT có nghiệm 

**Bài 5:** Chuyên Phan Bội Châu, năm học 2011

Tìm nghiệm nguyên của phương trình 

(Dạng )

**Lời giải**

Ta có 

+ 

+ 

Hoặc ta có nhận xét sau: Rõ ràng  là số lẻ nên ta có



+) 

+) 

+) 

+) 

**Bài 6:** Chuyên Phan Bội Châu, năm học 2011

Tìm  nguyên dương thỏa mãn  (Dạng tích)

**Lời giải**

Phương trình (\*)

Ta có 

Do  nguyên dương 

Phân tích 84 thành tích của 2 thừa số nguyên tố, mỗi thừa số lớn hơn hoặc bằng 3, ta được



Nhận thấy  chẵn,  chẵn, nên ta có  đều là các số chẵn



**Bài 7:** Phú Thọ, năm học 2017

Tìm nghiệm nguyên của phương trình  (Dạng tích)

**Lời giải**

Ta có 

Ta có 

+) TH1: 

+) TH2: 

+) TH3: 

**Bài 8:** Chuyên Bắc Giang, năm học 2018

Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để  là số chính phương

(Phản chứng)

**Lời giải**

Giả sử tồn tại  sao cho  là số chính phương

Khi đó ta có: 

Nhận thấy  là số chẵn

Từ (\*) là số chẵn 

Nhưng 

Vậy phương trình vô nghiệm.

**Bài 9:**

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn  (đánh giá)

**Lời giải**

Ta có 

+ TH1:  (không thỏa mãn)

+ TH2:  (thỏa mãn)

+ TH3: , ta có 

Vậy  không thỏa mãn

Vậy  là nghiệm duy nhất của phương trình.

**Bài 10:** Chuyên Tuyên Quang, năm học 2018

Tìm nghiệm nguyên của phương trình 

**Lời giải**

Cách 1:

Phương trình (\*) 





Do  nên ta có các trường hợp

+ 

+ 

+ Với 

+ Với 

Cách 2: 





+ 

+ 

**Bài 11:**

Tìm các số nguyên tố  sao cho 

**Lời giải**

Do  có vai trò như nhau, giả sử 

- Nếu  lẻ  chẵn và  nên không tồn tại số nguyên tố 

Vậy 

+ Nếu  chẵn,  loại

+ Nếu  chẵn,  loại

+ Nếu  là số lẻ và 

Đặt  chia cho 3 dư 2

Do p không chia hết cho 3 nên  chia cho 3 dư 1

Từ đó  chia hết cho 3  và  loại

Vậy  hoặc 

**BÀI TẬP TƯƠNG TỰ**

**Bài 1:**

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình 

**Lời giải**

Viết phương trình đã cho thành phương trình bậc nhất bậc hai đối với 



Điều kiện cần để (1) có nghiệm là 



Do  hoặc 

Từ đó ta tìm được các nghiệm của phương trình:



**Bài 2:**

Tìm các số nguyên  thỏa mãn 

**Lời giải**

Đặt  phương trình đã cho trở thành 

Phân tích  thành tích của hai số nguyên, và chú ý rằng  ta có duy nhất một trường hợp: 

**Bài 3:** Chuyên Lam Sơn, năm học 2011

Tìm nghiệm nguyên của phương trình 

**Lời giải**

Phương trình đã cho tương đương 



Phân tích 1 thành tích của các số nguyên ta được 2 trường hợp:



**Bài 4:** Chuyên Lam Sơn, năm học 2011

Tìm nghiệm nguyên của phương trình 

**Lời giải**

Phương trình đã cho 



**Bài 5:** Chuyên Bắc Giang, năm học 2012

Tìm nghiệm nguyên của phương trình 

**Lời giải**

Phương trình đã cho 

 nên . Vậy (1) là phương trình bậc hai ẩn  có 

Để (1) có nghiệm nguyên thì  phải là số chính phương

Với  từ  thỏa mãn

Với , để  là số chính phương thì tồn tại số tự nhiên  sao cho:



Từ đó ta tính được 

**Bài 6:** Chuyên Hà Nam, năm học 2012

Tìm nghiệm nguyên của phương trình 

**Lời giải**

Phương trình đã cho tương đương 

Từ đó suy ra  phải là ước nguyên dương của , vậy:

 hoặc 

Vậy phương trình đã cho không cso nghiệm nguyên.

**Bài 7:** Chuyên Bắc Giang, năm học 2013

Tìm nghiệm nguyên của phương trình 

**Lời giải**

Với mọi  thì , từ phương trình đã cho 

Do 

Với  (vô nghiệm)

Với  (thỏa mãn)

Từ đo thử các giá trị của  để tìm .

**Bài 8:** Chuyên Hùng Vương, năm học 2013

Tìm các số tự nhiên thỏa mãn phương trình 

**Lời giải**

Biến đổi phương trình đã cho thành 

Do 

Mà  là số tự nhiên nên hoặc  hoặc 

Với 

Với  (loại)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất 